

Concurs MATE-INFO UBB, 25 martie 2018  
Proba scrisă la MATEMATICĂ

NOTĂ IMPORTANTĂ:

1) Problemele tip grilă (Partea A) pot avea unul sau mai multe răspunsuri corecte. Acestea trebuie indicate de candidat pe foaia de concurs. Obținerea punctajului aferent problemei este condiționată de identificarea tuturor variantelor de răspuns corecte și numai a acestora.

2) Pentru problemele din Partea B se cer rezolvări complete pe foaia de concurs. Acestea sunt evaluate în detaliu conform baremului.

PARTEA A

1. (5 puncte) Funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -4x^2 + 20x - 25$  are:

A un maxim strict mai mic ca 0;  B un minim negativ;  C un maxim egal cu 0;  D un minim egal cu 0;  
 E un maxim strict mai mare ca 0.

2. (5 puncte) Considerăm funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

A funcția  $f$  admite o asimptotă oblică;  B funcția  $f$  admite asimptotă orizontală atât spre  $+\infty$  cât și spre  $-\infty$ ;  C funcția  $f$  nu are nici o asimptotă verticală;  D  $-1 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ ;  E  $f$  este o funcție monotonă pe  $\mathbb{R}$ .

3. (5 puncte) Dacă  $a, b \in \mathbb{R}$ , atunci numărul complex  $a + bi$  este nenul dacă și numai dacă:

A  $a \cdot b \neq 0$ ;  B  $a^2 + b^2 \neq 0$ ;  C numerele  $a$  și  $b$  nu sunt simultan nule;  D  $a = b \neq 0$ ;  E  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

4. (5 puncte) Dacă  $\sin \alpha + \sin \beta = a$  și  $\cos \alpha + \cos \beta = b$ , atunci

A  $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$ ;  B  $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$ ;  C  $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \pm \sqrt{\frac{4 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}$ ;

D  $\cos(\alpha - \beta) = \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}$ ;  E  $\cos(\alpha + \beta) = a^2 + b^2 - 2$ .

5. (5 puncte) Valoarea limitei  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{2}{n}\right)^n$

A nu există;  B este  $\frac{e}{2}$ ;  C este  $e^2$ ;  D este  $\sqrt{e}$ ;  E este  $2e$ .

6. (5 puncte) Se consideră punctele  $A(0, 0)$ ,  $B(21, 0)$ ,  $C(0, 21)$ . Câte puncte cu ambele coordonate întregi sunt în interiorul triunghiului  $ABC$ ?

A 242;  B 190;  C 231;  D 210;  E 284.

PARTEA B

1. Fie  $G = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$  și  $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ . Arătați că:

a) (4 puncte)  $G$  este parte stabilă a lui  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  în raport cu înmulțirea matricelor;

b) (5 puncte)  $(G, \cdot)$  este grup (unde cu  $\cdot$  s-a notat operația indusă de înmulțirea matricelor pe  $G$ );

c) (8 puncte)  $(H, \cdot)$  este un subgrup al lui  $(G, \cdot)$  și este izomorf cu grupul aditiv  $(\mathbb{R}, +)$  al numerelor reale.

d) (8 puncte) Fie  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$  și  $n \in \mathbb{Z}$  un număr întreg. Să se calculeze  $A^n$ .

**2. a) (5 puncte)** Fie  $ABC$  un triunghi oarecare. Demonstrați că pentru orice punct  $M$  din planul triunghiului avem relația

$$\vec{AB} \cdot \vec{CM} + \vec{AC} \cdot \vec{MB} + \vec{AM} \cdot \vec{BC} = 0.$$

**b) (10 puncte)** Rezolvați ecuația

$$4^{\sin 2x} + 4^{3-\sin 2x} = 65, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**3.** Considerăm funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin relația

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 1 \\ x - 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

**a) (6 puncte)** Determinați punctele de extrem local ale funcției  $f$ .

**b) (7 puncte)** Determinați primitivele funcției  $f$ .

**c) (7 puncte)** Calculați  $\int_0^2 f(x) dx$ .

NOTĂ:

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

# BAREM DE CORECTARE

## PARTEA A

1.  $\boxed{C}$  ..... 5 p
2.  $\boxed{B}, \boxed{C}, \boxed{D}$  ..... 5 p
3.  $\boxed{B}, \boxed{C}$  ..... 5 p
4.  $\boxed{A}, \boxed{D}$  ..... 5 p
5.  $\boxed{C}$  ..... 5 p
6.  $\boxed{B}$  ..... 5 p

## PARTEA B

1. a)  $A, B \in G \Leftrightarrow \det A \neq 0 \neq \det B \Rightarrow \det(AB) = \det A \cdot \det B \neq 0$   
 $\Rightarrow AB \in G$  ..... 4 p

b) Știind că înmulțirea matricelor e asociativă, din proprietatea precedentă rezultă  
 $\forall A, B, C \in G \subseteq M_2(\mathbb{R}), (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$  (în  $G$ ) ..... 1 p

Cum  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  are determinantul 1, se deduce că  $I_2 \in G$  și este element unitate în  $(G, \cdot)$  ... 2 p

Pentru orice  $A \in G, \det A \neq 0$ , deci există  $A^{-1}$  și  $1 = \det I_2 = \det A \cdot \det(A^{-1}) \Rightarrow \det(A^{-1}) \neq 0$ , prin urmare există  $A^{-1} \in G$  astfel încât  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$ , ceea ce completează demonstrația faptului că  $G$  este grup ..... 2 p

c) Cum  $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \forall a \in \mathbb{R}, H$  este o submulțime nevidă a lui  $G$  ( $I_2 \in H$ ), ..... 1 p  
 care este parte stabilă în raport cu  $\cdot$  deoarece

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H \quad (1) \dots\dots\dots 1 p$$

și pentru orice  $a \in \mathbb{R}$  inversa matricii  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  este  $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$  ..... 2 p

Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow H, f(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  este, conform (1), morfism de la  $(\mathbb{R}, +)$  la  $(H, \cdot)$  ..... 2 p

Scriind definițiile injectivității și surjectivității, rezultă imediat că  $f$  este bijectivă ..... 2 p

d) Intuirea faptului că  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}$  ..... 2 p

Demonstrația prin inducție a faptului că  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}$  ..... 4 p

Dacă  $m \in \mathbb{N}^*$  atunci  $A^{-m} = (A^{-1})^m = \begin{pmatrix} 1 & m(-a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (-m)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , ceea ce completează demonstrația. .... 2 p

2. a) (5 puncte)

(i) Descompunerea lui  $\overrightarrow{CM}$  ..... 1 p

(ii) Descompunerea lui  $\overrightarrow{MB}$  ..... 1 p

(iii) Descompunerea lui  $\overrightarrow{BC}$  ..... 1 p

(iv) Înlocuirea în formulă ..... 1 p

(v) Efectuarea calculului și rezultatul final ..... 1 p

2. b) (10 puncte)

(i) Notăția  $4^{\sin 2x} = t$  ..... 2 p

(ii) Deducerea ecuației de gradul al doilea în expresia cerută ..... 2 p

- (iii) Rezolvarea ecuației de gradul al doilea ..... 3 p
- (iv) Eliminarea soluției  $t = 3$  ..... 1 p
- (v) Soluția finală ..... 2 p

**3. a)** (6 puncte)

- (i) Determinarea punctului  $x_1 = 0$  ..... 2 p
- (ii) Demonstrarea faptului că  $x_1$  este maxim local ..... 2 p
- (iii) Studiul punctului  $x_2 = 1$  ..... 2 p

**3. b)** (7 puncte)

- (i) Determinarea primitivelor pe intervalele  $(-\infty, 1)$  și  $(1, \infty)$  ..... 4 p
- (ii) Determinarea relației între cele două constante ..... 2 p
- (iii) Forma finală a primitivelor ..... 1 p

**3. c)** (7 puncte)

- (i) Calculul valorilor  $F(0)$  și  $F(2)$  ..... 4 p
- (ii) Folosirea formulei Newton-Leibniz ..... 2 p
- (iii) Rezultatul final ..... 1 p

**NOTĂ:** Orice altă soluție corectă va fi punctată corespunzător.

# Răspunsuri și soluții

## PARTEA A

1.  $\mathbb{C}$ ; 2.  $\mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ ; 3.  $\mathbb{B}, \mathbb{C}$ ; 4.  $\mathbb{A}, \mathbb{D}$ ; 5.  $\mathbb{C}$ ; 6.  $\mathbb{B}$ .

## PARTEA B

1. a)  $A, B \in G$ , deci  $\det A \neq 0 \neq \det B$  și astfel  $\det(AB) = \det A \cdot \det B \neq 0$ . În consecință  $AB \in G$ .

b) Știind că înmulțirea matricelor e asociativă, din proprietatea deja demonstrată rezultă

$\forall A, B, C \in G \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$  (în  $G$ ). Cum  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  are determinantul

1, se deduce că  $I_2 \in G$ . Astfel  $I_2$  este element unitate și în  $(G, \cdot)$ . Pentru orice  $A \in G$ , din faptul că  $\det A \neq 0$  rezultă că există  $A^{-1}$ , iar din relația  $1 = \det I_2 = \det A \cdot \det(A^{-1})$  deducem  $\det(A^{-1}) \neq 0$ , prin urmare  $A^{-1} \in G$  și  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$ , deci  $(G, \cdot)$  este grup.

c) Cum  $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \forall a \in \mathbb{R}$ ,  $H$  este o submulțime nevidă a lui  $G$  ( $I_2 \in H$ ). Pe de altă parte  $\forall a, b \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ , deci  $H$  este parte stabilă în raport cu operația "  $\cdot$  ". Pentru orice  $a \in \mathbb{R}$  inversa matricii  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  este  $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ , deci  $H$  este un subgrup al grupului  $(G, \cdot)$ . Mai mult funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow H, f(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  este morfism de la  $(\mathbb{R}, +)$  la  $(H, \cdot)$  deoarece

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

$f$  este injectivă și surjectivă, deci  $f$  este o bijecție. Astfel  $(\mathbb{R}, +)$  este izomorf cu  $(H, \cdot)$ .

d) Demonstrăm prin metoda inducției matematice că

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru  $n = 1$  proprietatea este adevărată. Dacă  $m \in \mathbb{N}^*$  și  $A^m = \begin{pmatrix} 1 & ma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , atunci

$$A^{m+1} = A^m \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & ma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (m+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

deci relația este adevărată și pentru  $m + 1$ . Astfel pe baza principiului inducției matematice relația este adevărată pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . Dacă  $m \in \mathbb{N}^*$ , atunci

$$A^{-m} = (A^{-1})^m = \begin{pmatrix} 1 & m(-a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (-m)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pentru  $m = 0$  avem  $A^0 = I_2$ , deci

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

**Observație:** O altă abordare pentru c) și d) ar putea fi: funcția  $F: \mathbb{R} \rightarrow G, F(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  este, conform (1), morfism injectiv de la  $(\mathbb{R}, +)$  la  $(G, \cdot)$  și  $F(\mathbb{R}) = H$ . Rezultă că  $H$  e subgrup în  $G$ , că  $(\mathbb{R}, +) \simeq (H, \cdot)$  și că  $F(na) = [F(a)]^n$ , pentru orice  $n \in \mathbb{Z}$ , adică are loc (2).

2. a) Avem:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}, \\ \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}, \\ \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB},\end{aligned}$$

prin urmare

$$\begin{aligned}S &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) + \\ &+ \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) + \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}).\end{aligned}$$

După desfacerea parantezelor și folosirea comutativității produsului scalar obținem  $S = 0$ .

b) Cu notația

$$t = 4^{\sin 2x}$$

ecuația devine

$$t + \frac{64}{t} = 65$$

sau

$$t^2 - 65t + 64 = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuații sunt  $1 = 4^0$  și  $64 = 4^3$ .

Suntem, astfel, conduși la soluțiile

$$\sin 2x = 3$$

care nu convine (deoarece  $\sin 2x \leq 1$ ), și

$$\sin 2x = 0,$$

care admite soluțiile  $x \in \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

3. a) Pe intervalul  $(-\infty, 1)$  funcția este  $f(x) = -x^2$ , deci pe acest interval  $f'(x) = -2x$ . Astfel din ecuația  $f'(x) = 0$  deducem  $x_1 = 0$  și din semnul derivatei ( $f'(x) > 0$  pentru  $x < 0$  și  $f'(x) < 0$  pentru  $0 < x < 1$ ) rezultă că  $x_1 = 0$  este un punct de extrem local pentru  $f$ .  $f$  fiind derivabilă pe  $(-\infty, 1)$  și ecuația  $f'(x) = 0$  neavând alte soluții,  $x_1$  este singurul punct de extrem local al funcției situat în intervalul  $(-\infty, 1)$ . Pe intervalul  $(1, \infty)$  funcția este strict crescătoare (fiind de gradul unu și având coeficientul termenului dominant pozitiv), deci pe acest interval nu are puncte de extrem local. Rămâne de studiat punctul  $x_2 = 1$  în care funcția nu este derivabilă.  $f(1) = -1$  și pentru  $x \in (-1, 1)$   $-x^2 > -1$ , deci

$$f(x) > f(1), \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Pe de altă parte dacă  $x \geq 1$ , atunci  $x - 2 \geq -1$ , deci

$$f(x) \geq f(1), \quad \forall x \in [1, \infty).$$

Astfel

$$f(x) \geq f(1), \quad \forall x \in (-1, \infty),$$

adică  $x_2$  este punct de minim local.

b) Folosind consecințele teoremei lui Lagrange pe intervalele  $(-\infty, 1)$  și  $(1, \infty)$ , orice primitivă  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a lui  $f$  are forma

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} + c_1, & x < 1 \\ \frac{x^2}{2} - 2x + c_2, & x > 1 \end{cases}$$

$F$  fiind derivabilă este și continuă, deci

$$F(1) = -\frac{1}{3} + c_1 = -\frac{3}{2} + c_2.$$

Astfel primitivele lui  $f$  au forma

$$F(x) = C + \begin{cases} -\frac{x^3}{3}, & x < 1 \\ \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{7}{6}, & x \geq 1 \end{cases} .$$

c) Folosim formula Newton-Leibniz:

$$\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0) = 2 - 4 + \frac{7}{6} - 0 = -\frac{5}{6}.$$

**Observație:** Integrala poate fi calculată și fără forma exactă a primitivei dacă o descompunem în două:

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$$