

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

ÚLOHA I.

(30 bodov)

- 5b** 1. Vypočítajte celú časť reálneho čísla $a = \sqrt[3]{125} + \sqrt{5}$.
- 5b** 2. Je daná funkcia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + m$, kde m je reálne číslo. Nájdite reálne číslo m vediac, že $(f \circ f)(x) = f(x+1)$, pre ľubovoľné reálne číslo x .
- 5b** 3. Riešte v množine reálnych čísel nerovnicu $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{3x+5}$.
- 5b** 4. Nájdite počet podmnožín, ktoré majú najmenej tri prvky množiny $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.
- 5b** 5. Je daný trojuholník MNP , v ktorom $MN = 6$, $MP = 8$ a $m(\sphericalangle M) = 90^\circ$. Vypočítajte dĺžku vektora $\vec{u} = \vec{MN} + \vec{MP}$.
- 5b** 6. Nájdite reálne číslo x vediac, že $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + 2 = 0$ a $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

ÚLOHA II.

(30 bodov)

1. Je daná matica $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 2x-1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2x-1 & 0 & x \end{pmatrix}$, kde x je reálne číslo.
- 5b** a) Určte reálne čísla x , pre ktoré $\det(A(x)) = 0$.
- 5b** b) Dokážte, že $A(x) + A(1-x) = 2A\left(\frac{1}{2}\right)$, pre ľubovoľné reálne číslo x .
- 5b** c) Určte reálne číslo x , pre ktoré $A(x) \cdot A(1-x) = \frac{1}{2}A\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. Na množine $\mathbb{Z}_{20} = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{19}\}$ je definovaná binárna operácia $x \circ y = xy + \hat{3}x + \hat{3}y + \hat{9}$.
- 5b** a) Dokážte, že $x \circ y = (x + \hat{3})(y + \hat{3})$, pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{Z}_{20}$.
- 5b** b) Určte $a \in \mathbb{Z}_{20}$ vediac, že $a \circ x = \hat{0}$, pre ľubovoľné $x \in \mathbb{Z}_{20}$.
- 5b** c) Uved'te príklady čísel $a, b \in \mathbb{Z}_{20} \setminus \{\hat{17}\}$, pre ktoré $a \circ b = \hat{0}$.

ÚLOHA III.

(30 bodov)

1. Je daná funkcia $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - \sqrt{x}$.
- 5b** a) Ukážte, že $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = \frac{7}{2}$.
- 5b** b) Určte obraz funkcie f .
- 5b** c) Dokážte, že $2e^{2x} - e^{\frac{x}{2}} + \frac{3}{8} \geq 0$, pre ľubovoľné reálne číslo x .

2. Je daná funkcia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

5b a) Ukážte, že $\int_0^1 f(\operatorname{tg} x) dx = \frac{1}{2}$.

5b b) Vypočítajte $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1} dx$.

5b c) Dokážte, že $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n+2} \leq (n+1) \int_0^1 x^n f(x) dx \leq \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2(n+2)}$, pre ľubovoľné nenulové prirodzené číslo n .